Revue de l'Université d'Ottawa.
Juillet-septembre 1942.

La Connaissance Mathématique

D'APRÈS SAINT THOMAS D'AQUIN

La pensée médiévale s'est intéressée, à des degrés divers, aux grands problèmes légués par la culture classique et fécondés par l'appoint du christianisme. Soucieux de la véritable hiérarchie des valeurs, les philosophes du moyen âge n'ont pas prêté autant d'attention aux mathématiques qu'aux questions troublantes que pose la raison au service de la foi. Dans ce dessein, d'ailleurs, les mathématiques ne pouvaient pas leur être d'un grand secours. Depuis la faillite du platonisme, qui n'avait pas réussi à donner une expression technique à l'idée de mathématiser l'univers et l'existence, la logique aristotélicienne suffisait amplement comme instrument de rationalisation de l'expérience. Et les mathématiques n'occupaient plus dans la connaissance cette position centrale qu'elles avaient au début comme méthode, comme modèle et comme moyen de travail de la pensée discursive. C'est dans le cadre de ces considérations générales qu'il convient d'étudier le caractère des mathématiques médiévales, et les réflexions d'ensemble qu'elles ont suscitées à saint Thomas en particulier.

I. — LES MATHÉMATIQUES AU DÉBUT DU MOYEN ÂGE.

Si la constitution de l'*Organon* aristotélicien avait relégué les mathématiques à leur véritable position dans la classification des connaissances humaines, l'étude désintéressée de ces sciences ne pouvait pas avoir des résultats dépassant la considération de leur objet propre. Or cet objet était moins important pour le moyen âge que les questions plus fondamentales et substantielles qui le préoccupaient. Il n'en reste pas moins qu'en raison de la part nécessaire que les mathématiques occupent non seulement dans la science et dans le problème de la connaissance, mais encore dans les arts pratiques et la vie sociale, elles méritent l'attention suivie du penseur. Pour cela, il convient de déterminer l'aspect technique que les mathématiques avaient pris au début du moyen âge, sous le triple point de vue de leur inspiration, de leur notation et de leur méthode.

En conseillant d'instruire la jeunesse studieuse dans les arts de l'arithmétique, de l'astronomie, de la géométrie et de la musique, Platon avait jeté les fondements de ces pratiques pédagogiques au second degré qu'Isidore de Séville avait groupées sous le nom de *quadrivium*, et qui se perpétuèrent dans les écoles du moyen âge. Mais le contenu médiéval de cet enseignement ne correspondait pas, à ses débuts surtout, à l'idéal platonicien. Héritier de la tradition romaine plutôt que grecque, le haut moyen âge avait donné un goût plus pragmatique que scientifique à ces quatre sujets d'enseignement. L'arithmétique du quadrivium n'allait pas plus loin que les besoins du comput ecclésiastique et de la détermination des fêtes religieuses et des jours fériés. Plus tard, avec l'introduction de la numération indo-arabe, l'arithmétique annexa les règles pratiques utiles à une comptabilité rudimentaire. La géométrie ne comportait pas plus que des règles pour l'arpentage, l'architecture, et le tracé des cartes géographiques, auxquelles allaient bientôt s'ajouter quelques énoncés sans preuves des *Éléments* d'Euclide. L'astronomie et la musique, de leur côté, ne dépassaient guère ce faible niveau des autres sciences.

On pourrait penser que les sciences de la nature, et l'astronomie en particulier, avaient besoin de formes mathématiques souples et effectives; d'autant plus que la voix autorisée de Roger Bacon devait plus tard rappeler avec insistance la nécessité d'une interprétation mathématique des phénomènes de l'univers. Mais ce domaine aussi était moins important à cultiver que celui des réalités profondes révélées par la théologie et la philosophie. Et sans le négliger complètement, le moyen âge pouvait se contenter pour sa cosmologie et sa physique des moyens d'expression que lui avait transmis la science gréco-arabe. Quant aux arts pratiques, les besoins de l'époque n'exigeaient pas une élaboration trop poussée des mathématiques appliquées: les règles empiriques léguées par la tradition, d'une part, et les moyens techniques suggérés par les circonstances sociales et les besoins militaires de ces temps, de l'autre, suffisaient amplement aux artisans.

Il est intéressant de signaler, d'ailleurs, que les spéculations mathématiques indépendantes de préoccupations empiriques, tendaient invariablement vers la mystique des grandeurs. Encouragés par les intuitions des premiers scolarques de l'Académie, et par les fantaisies métaphilosophiques des néo-pythagoriciens et des néo-platoniciens, les esprits les plus cultivés du moyen âge n'hésitaient pas à s'élancer vers les abstractions substantielles, dirions-nous, de la numérologie et de la gématrie (application de la numérologie aux figures spatiales ou à des combinaisons de lettres constituant des messages à clef). Or ce genre de recherches permettait parfois la découverte de relations numériques remarquables en elles-mêmes, mais isolées et donc stériles: il n'a jamais su conduire à de vrais développements mathématiques.

N'oublions pas aussi que les premiers penseurs du moyen âge n'avaient guère à leur disposition toute la science ancienne, pour s'en servir comme de point de départ de nouvelles recherches. Les bouleversements politiques et sociaux qui suivirent la chute de l'Empire romain laissèrent des traces profondes sur l'organisation intellectuelle de ces époques: la continuité scientifique avec les Grecs était rompue et ne devait être reprise qu'indirectement et imparfaitement plus tard avec les traductions de l'arabe. Quelques lueurs sur les mathématiques grecques furent octroyées aux étudiants du X[e] siècle par la découverte des manuscrits de Boèce que fit Gerbert. Or le contenu scientifique de ces manuscrits était bien rudimentaire: l'*Arithmetica* était surtout une traduction de Nicomaque, à l'exclusion des plus beaux résultats contenus dans l'original; quant aux livres authentiques de la *Geometria*, ils ne donnaient que les définitions, postulats et axiomes établis par Euclide, les simples énoncés sans preuve des théorèmes des trois premiers livres des *Éléments*, et des exemples numériques de mesures d'aires planes d'après les méthodes des arpenteurs. D'ailleurs, les parties consacrées au quadrivium dans les encyclopédies de Capella, de Cassiodore et d'Isidore de Séville, n'allaient pas au delà de ces mêmes rudiments.

Un recueil de questions mathématiques compilé vers le XI[e] siècle sous le titre de *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, donne une idée de la science de l'époque: les fractions y sont rarement employées, les racines n'y sont pas mentionnées, et les simples opérations se rapportent surtout à des nombres entiers et à des formules qui rappellent les mathématiques égyptiennes. D'ailleurs, la technique opératoire en vogue était peu commode et confuse, vu qu'elle en était encore au système de numération et à l'*abaque* des Romains. Gerbert lui-même et son disciple Bernelinus, sans trop dévier de la tradition de Bède et d'Alcuin, firent accomplir bien peu de progrès à l'art du calcul. La règle de la division donnée par Gerbert était si compliquée, qu'elle était connue sous le nom de *divisio ferrea*, par contraste avec celui de *divisio aurea* donné plus tard à la méthode arabe de division. Mais si on ne saurait dire que les recherches de Gerbert sur la computation et les nombres polygonaux soient intrinsèquement importantes, il faut reconnaître qu'elles ont eu le mérite de maintenir l'intérêt des clercs pour les mathématiques, et de mieux faire comprendre et apprécier par certains de ses successeurs la valeur des découvertes qui allaient être faites pendant les deux siècles suivants.

Un double événement vint provoquer un certain essor des mathématiques au XII[e] et au XIII[e] siècle: les traductions des anciens d'après les versions arabes, et l'introduction des chiffres et des méthodes indo-arabes en occident. Les précurseurs latins des premiers humanistes, comme Adélard de Bath, Robert de Chester, Gérard de Crémone ou Jean de Séville, donnèrent aux érudits chrétiens les traductions latines de textes arabes d'auteurs grecs et orientaux. C'est ainsi que nous parvinrent les *Éléments* d'Euclide, les *Sphériques* de Théodose, l'*Almageste* de Ptolémée, les ouvrages d'arithmétique et d'algèbre d'Alkhowarizmi et d'autres traités scientifiques importants. Il est intéressant de constater cependant, qu'en dépit de ces traductions, le moyen âge s'est intéressé bien peu à la géométrie grecque et à ses possibilités de développement. Le fait reste qu'il a montré bien plus de curiosité pour les procédés de numération, pour les règles et les artifices de calcul venus des orientaux, et enfin pour ce qu'on pourrait appeler l'interprétation numérique ou algébrique du mouvement.

Cette considération est bien plus importante qu'elle ne paraît au premier abord. Ce n'est pas en raison de la nouveauté des inventions indo-arabes qu'il faut expliquer cette curiosité, mais bien, croyons-nous, par rapport à des motifs plus fondamentaux que nous essayerons de déterminer. On sait que Platon, développant une idée de son ami Archytas de Tarente, le mathématicien pythagoricien, vit dans une intuition de génie que les grandeurs géométriques — et avec elles l'univers tout entier construit avec les triangles-éléments — ne pouvaient se justifier qu'au moyen des idées-nombres. Pour réaliser cette intuition, il fallait commencer par construire le continu géométrique au moyen de nombres. Mais si Platon avait bien vu la nécessité d'élargir pour cela le concept du nombre entier fourni par les pythagoriciens, et de donner droit de cité au nombre irrationnel, il n'avait ni les moyens matériels (symbolisme numérique) ni les moyens formels (principes et artifices de manipulation) de nous donner la loi de formation des nombres réels. En se réfugiant dans les hauteurs de la métaphysique des formes, ses explications prêtèrent le flanc à la critique décisive d'Aristote, et provoquèrent en quelque sorte la constitution, par ce dernier, d'une logique qui devait remplacer désormais les mathématiques comme instrument indispensable du raisonnement en même temps que de l'interprétation du monde.

Or c'est ici que notre argument prend forme. Ayant à leur disposition un *organon* bien constitué, et n'étant plus astreint à ordonner leur pensée mathématique dans la perspective du nombre, les savants de la période alexandrine ont porté la géométrie grecque à son apogée, en subordonnant en quelque sorte le nombre à la grandeur. Les travaux d'Euclide, d'Apollonius et de Pappus en géométrie pure, et ceux d'Aristarque, d'Hipparque et de Ptolémée en astronomie mathématique, en sont la preuve. Il est vrai qu'Archimède avait le premier introduit des méthodes purement mécaniques en géométrie, malgré les règles platoniciennes; mais là encore, le sage de Syracuse a toujours présenté ses résultats sous la forme canonique exigée par l'esprit et les habitudes de l'époque. Quant aux considérations purement numériques, la métaphysique des nombres inspirée de Platon et de ses prédécesseurs pythagoriciens trouva refuge dans des spéculations en marge de la science.

Mais ce besoin d'interpréter les grandeurs et le monde sensible en termes du nombre n'a jamais disparu de la pensée occidentale, même dans ses tâtonnements pratiques pendant le haut moyen âge. Aussi l'introduction des conceptions indo-arabes au XII^{e} siècle, devait-elle rallier inconsciemment les esprits à ces méthodes mathématiques nouvelles fondées sur des intuitions numériques et des artifices de manipulation. En effet, quelle était l'inspiration de cette technique? Tout d'abord, les Hindous ne se souciaient pas de discuter ou de défendre cette *congruence* de l'arithmétique et de la géométrie qu'avait cherchée Platon et que les savants alexandrins avaient abandonnée, faute de pouvoir la réaliser. Pour eux, il s'agissait de coordonner l'arithmétique et la *mensuration*, plutôt que la congruence. Or dans cette perspective, il n'est pas besoin d'insister sur les différences entre les droites et les courbes, du moment que toutes deux sont capables d'évaluation numérique plus ou moins exacte. Les paradoxes de l'infini, qui avaient troublé les Grecs depuis Zénon, pouvaient être entièrement laissés de côté, si les besoins pratiques exigeaient la considération de quantités augmentant indéfiniment. C'est pourquoi les Hindous, comme leurs continuateurs les Arabes, ne craignaient point de manipuler comme des nombres véritables, aussi bien les incommensurables, qui étaient la gageure de l'école platonicienne, que les nombres négatifs, que Diophante même voulait soigneusement éviter.

L'heureuse désinvolture avec laquelle les indo-arabes manipulaient des concepts aussi chargés de difficultés et de controverses philosophiques, leur permit d'inventer des méthodes qui passèrent telles quelles en Occident aussi bien avec les traducteurs, qu'avec les fameux traités de Léonard de Pise: le *Liber Abaci* (1202) qui nous donne l'arithmétique et l'algèbre, et la *Practica Geometriæ* (1220) qui contient toute la géométrie pratique et la trigonométrie établies par les orientaux en combinaison avec des éléments empruntés aux grecs. Ces deux livres ayant servi de source pendant des générations pour les manuels de mathématiques du moyen âge, et par conséquent, pour l'enseignement habituel des sujets du quadrivium, il serait juste de penser que les jeunes clercs des monastères, et donc saint Thomas lui-même, ne devaient pas en ignorer le contenu en général.

Nous ne voulons pas dire que le contenu des deux principaux traités de Léonard de Pise ait été immédiatement adopté sans discussion par les érudits du moyen âge, ou même que les concepts nouveaux qu'ils contiennent aient été compris tout de suite et utilisés sans hésitation par ses contemporains. Ainsi, il a fallu longtemps pour que les nombres négatifs s'imposent; et Léonard de Pise lui-même, tout en reconnaissant la double racine de l'équation du second degré, ne se soucie pas beaucoup des racines négatives ou incommensurables. D'autre part, la valeur de zéro rendait ce nombre suspect aux érudits, bien que les marchands en aient tout de suite compris l'utilité pratique. N'oublions pas aussi que les Hindous eux-mêmes n'étaient pas encore bien sûrs de l'interprétation à donner au zéro: pour Brahmagupta, par exemple, le zéro était un infiniment petit se réduisant à rien en fin de compte; et pour Bhaskara, bien que tout nombre multiplié par zéro équivalait à rien, ce nombre était tout de même retenu en quelque sorte, en cas où il pourrait servir à nouveau.

Il n'en reste pas moins que la notation indo-arabe et l'arithmétique de position étaient définitivement acquises à la civilisation occidentale; et qu'en libérant l'arithmétique de la géométrie dans ses procédés opérationnels, les conceptions indo-arabes posaient encore une fois le problème du nombre et de l'infini mathématique sous sa forme la plus complexe. C'est pourquoi ce problème prit tant d'ampleur chez les penseurs du moyen âge, et même aux dépens, pourrait-on dire, de sa mise en valeur dans les manipulations mathématiques proprement dites. Avec les *Summulæ Logicales* de Pierre d'Espagne, l'infini se présentait sous sa double forme d'infini catégorématique (dont toutes les parties étaient actuellement réalisées) et d'infini syncatégorématique (dont toutes les parties n'avaient qu'une existence potentielle). Les mérites et les implications de cette double forme étaient l'objet de discussions passionnées durant tout le moyen âge: les philosophes avaient beaucoup à dire sur l'*intension* et la *rémission* des formes, sur la *latitude uniforme* et la *latitude difforme*, ou encore sur la notion de variabilité. Les partisans de la réalité de l'indivisible, déjà proposée par Capella, Isidore de Séville et Bède, qui divisait l'heure en 22,560 instants ou « atomes de temps », avaient rallié Grosseteste, Burley et Gœthals; tandis que l'opposition était menée par Roger Bacon, Duns Scot, saint Thomas, Occam et Bradwardine, qui partage avec les péripatéticiens l'horreur de l'atomisme, et qui défend dans son *Tractatus de Continuo* une théorie de l'infini potentiel bien voisine des conceptions de l'intuitionnisme mathématique contemporain.

Il est important de noter que ces discussions se développaient non seulement sous l'influence des mathématiques indo-arabes, mais encore sous l'inspiration de la pensée d'Aristote, qui fut leur vrai point de départ. Jusqu'au XIII^e siècle, en effet, le Stagyrite était surtout connu par ses travaux de logique; mais à partir de cette époque, ses ouvrages scientifiques étaient à la portée de tous les érudits, grâce aux efforts des traducteurs, et, par le règlement de 1255, la Sorbonne prescrivit toutes les œuvres d'Aristote comme textes obligatoires pour les candidats à la maîtrise. Or si la *Métaphysique* contenait une critique sévère des intuitions mathématiques de Platon, la *Physique* offrait de longues discussions sur l'infini, la continuité et d'autres notions fondamentales de l'analyse mathématique. Rapprochées des considérations méthodologiques des *Analytiques*, des problèmes épistémologiques du traité *De l'Âme*, et des polémiques scientifiques du *Corpus* aristotélicien en général, ces questions donnaient suffisamment de matière à réflexion aux savants du moyen âge, et excitaient davantage leur intérêt dans le double problème du nombre et de l'infini, qu'ils considéraient justement comme plus fondamental que celui des figures et de l'espace géométrique. Il est entendu que ces conceptions étaient agitées surtout en fonction de la philosophie, plutôt qu'à la lumière d'une axiomatique. Mais il n'en reste pas moins que ces discussions se trouvent directement dans la perspective historique du calcul infinitésimal et des controverses récentes sur le continu.

Il ne faut donc pas croire que le moyen âge n'a fait preuve d'aucune originalité en mathématiques. S'il n'a pas montré trop de zèle inventif pour la géométrie grecque et pour les méthodes algébriques gréco-arabes, cela peut se comprendre techniquement en pensant au degré de perfection que ces méthodes avaient atteint dans le cadre restreint dont elles s'étaient accommodées dès le début. Et c'est pourquoi certains historiens ont pu dire que rien d'important en mathématiques n'a paru en Europe entre le *Liber Abaci* de Léonard de Pise, et le *Liber Calculationum* de Suiseth le Calculateur, ou encore la *Summa De Arithmetica* (1494) de Luca Pacioli [1]. L'un d'eux consacre même quelques maigres paragraphes aux mathématiques pendant la « dépression européenne » et parle légèrement de « l'analyse sous-mathématique » de saint Thomas. Et pourtant, il

[1] Cf. H. HANKEL, *Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelhalter* (1874), p. 349; F. CAJORI, *History of Mathematics* (1931), p. 125. Par contre, C. BOYER (*The Concepts of the Calculus*, 1938) ou G. SARTON (*Introduction to the History of Science*, vol. 1, p. 19) rendent crédit au moyen âge.

fait un peu plus loin un curieux rapprochement entre cette même analyse, et les moyens employés par Cantor pour établir sa célèbre théorie des nombres transfinis. Il dit ainsi que « les preuves données par Cantor pour déterminer que la classe de tous les nombres algébriques est dénombrable, et pour établir la règle pour construire une classe infinie et non dénombrable de nombres réels, sont si bien dans la vraie tradition médiévale d'analyse sous-mathématique, qu'elles auraient convaincu et réjoui saint Thomas d'Aquin [2] ».

L'erreur de certains historiens des mathématiques dans leurs appréciations sur le moyen âge, consiste à tirer des conclusions de simples comparaisons entre les mathématiques médiévales et celles des anciens ou des modernes, du point de vue technique exclusivement. Or il convient de signaler que les mathématiques ne consistent pas uniquement dans l'élaboration de méthodes et de procédés bien définis, mais encore dans la discussion des concepts et des caractères de ces méthodes. L'histoire des sciences, et des mathématiques récentes en particulier, nous prouve que de telles discussions non seulement témoignent d'un intérêt actif dans les résultats acquis par la science, mais encore qu'elles préparent des découvertes futures. Dans cet ordre d'idées, la contribution du moyen âge a été des plus décisives.

Saint Thomas ne pouvait pas ignorer les divers problèmes que les mathématiques en général posent au philosophe. On s'en aperçoit bien vite en lisant ses œuvres, et en particulier ses divers *Commentaires* sur Aristote, son traité *De la Trinité*, et certaines questions comme la *85*e de la première partie de la *Somme Théologique*. Certes, saint Thomas n'a pas trop insisté sur toutes les implications conceptuelles et méthodologiques des mathématiques de son époque. Ainsi, nous n'avons pas de lui un commentaire complet des *Analytiques* et de la *Physique;* et il n'a pas jugé opportun de discuter les deux derniers livres de la *Métaphysique*, qui sont d'un intérêt essentiel pour la compréhension du mathématisme platonicien. Mais ce qu'il nous a donné est d'une importance suffisante pour nous permettre d'étudier sa pensée mathématique. Les notes que nous lui consacrons ici même ne se rapportent pas à toute cette pensée, mais à quelques aspects seulement de son épistémologie appliquée aux

[2] E. T. BELL, *The Development of Mathematics* (1940), p. 253.

mathématiques. Qu'on veuille donc bien les considérer comme une simple introduction à cette partie si intéressante et si relativement neuve de la philosophie thomiste.

II. — LA DOCTRINE DE L'ABSTRACTION.

La connaissance mathématique nè saurait être fondamentalement différente, pour saint Thomas, des étapes soigneusement établies de son épistémologie générale. Comme tout savoir, les mathématiques dérivent aussi de l'expérience en dernière analyse; car l'âme n'a pas d'abord de connaissance en acte, mais seulement en puissance [3]: par rapport à la connaissance même, elle est comme une table rase sur laquelle rien n'est gravé [4]. Il n'y a donc pas de raison d'attribuer aux notions mathématiques une position privilégiée, par exemple, en les considérant comme des idées innées.

Il est vrai que Platon enseigne que l'âme humaine, en raison d'une existence antérieure, amène avec elle dans le monde actuel une série de connaissances qui s'éveillent à l'occasion de sensations. Et l'on se souvient de l'exemple qu'il donne dans le *Ménon* où, pour illustrer sa théorie de la réminiscence, il utilise celle des incommensurables que lui avait enseignée Théodore de Cyrène [5]. Mais Platon a tort de ne considérer que l'immatérialité de l'esprit humain, et de ne pas assez tenir compte de son union avec le corps: c'est pourquoi il veut que des idées séparées soient l'objet de notre connaissance, et que celle-ci se réalise non point par voie d'abstraction, mais par une sorte de participation aux choses existant réellement en tant qu'abstraites. Ainsi, le fondateur de l'Académie considère comme des substances existant dans la réalité, les abstractions que nous obtenons uniquement par l'opération de notre intellect. En somme, il prétend que l'âme humaine connaît par une sorte d'impression produite en elle par les types supérieurs, intelligibles et séparés, de toutes choses. D'où il suit que notre âme est réduite à un état de passivité intellectuelle, et qu'elle n'agit pas directement sur la réalité elle-même.

[3] Cf. *Summa theol.*, I, q. 79, a. 2; q. 84, a. 3, a. 4 et a. 6.
[4] *Comm. De Anima* (éd. Marietti) lib. III, lect. 9 (n° 722).
[5] PLATON, *Ménon*, 82 *B* - 85 *B*.

Or saint Thomas n'est aucunement partisan de l'innéisme. En élaborant les arguments d'Aristote dans son *Traité De l'Âme* et les livres de la *Métaphysique*, il résume sa réfutation aux idées platoniciennes sous la forme d'une double objection. En premier lieu, on ne fait que reculer la difficulté en imaginant des idées substantielles et séparées, qui, d'une part, communiquent leur forme à tous les objets contingents ou matériels, et, de l'autre, impriment dans notre intellect des formes correspondantes: c'est l'argument du *troisième homme* entrevu par Parménide et par Platon lui-même, et repris par Aristote. Et il ajoute judicieusement que si l'espèce peut exister sans la matière, comme le voudrait Platon, alors l'intellect humain connaît les choses matérielles autrement qu'elles ne sont en elles-mêmes [6]. En second lieu, et c'est là une addition originale du Docteur angélique relevant de sa polémique contre Averroès, en plaçant en dehors de l'intellect humain le principe immédiat de son activité, on aboutit nécessairement à l'idée de l'âme universelle et au panthéisme [7].

Ces arguments ne perdent pas de leur force lorsqu'ils sont appliqués aux notions mathématiques, bien que celles-ci soient intermédiaires entre les idées et les choses dans l'épistémologie platonicienne. Au contraire, saint Thomas soutient que l'âme est en puissance par rapport à toutes les espèces intelligibles; et par conséquent, par rapport aux notions mathématiques. Si donc notre âme prend conscience de connaissances mathématiques, c'est que celles-ci lui viennent du dehors, c'est-à-dire de l'expérience. Et sans tomber dans les erreurs de l'empirisme, qui voudrait expliquer les mathématiques par les seules impressions matérielles du monde extérieur, il convient d'ajouter que la présence de l'objet ne suffit pas encore pour expliquer l'acte de la connaissance. L'objet qui figure dans la réalité et considéré sous son aspect spatial, ne s'unit pas comme tel ou immédiatement à l'âme dans son opération cognitive.

Il est donc nécessaire d'admettre une certaine assimilation du sujet qui connaît et de la chose qui est connue: « *Cognitio autem omnis fit per assimilationem cognoscentis et cogniti* [8]. » Aristote disait déjà que « lorsque l'esprit pense les objets mathématiques, il pense comme séparés des éléments qui n'existent pas séparément; et que, dans tous les cas, l'esprit

6 Cf. *Summa theol.*, I, q. 84, a. 1.
7 Cf. *Summa theol.*, I, 84, a. 4, a. 5 et a. 7.
8 *Contra Gentiles* (ed. Marietti), lib. I, cap. 65 (p. 59).

qui pense activement *est* les objets qu'il pense [9] ». En vertu de cette assimilation, le sujet est modifié, et il reçoit en lui-même une image de l'objet perçu. Plus précisément, cette image modifie le sujet et se transforme en lui, mais sans en changer la nature. Sensible dans les sens, l'image fournit alors la matière sur laquelle travaille l'intellect agent, qui la dépouille de toute existence individuelle pour la rendre intelligible ou abstraite. A son tour, l'image abstraite passe aussitôt dans l'intellect patient, l'informe en quelque sorte, et lui sert de moyen pour concevoir l'essence des choses offertes à notre connaissance.

Le concept termine ainsi l'action directe de l'intellect: « *Intelligere in radice prius est verbo, et verbum est terminus actionis intellectus* [10]. » Mais il sert ensuite d'aliment à la réflexion par laquelle l'intellect, se repliant sur lui-même, connaît son acte et peut acquérir de nouvelles idées par l'analyse et la synthèse. Ce qu'il importe de retenir ici, c'est le rôle décisif de l'intellect qui a la triple mission d'abstraire la matière de l'objet de la connaissance, d'en concevoir l'essence, et de réfléchir enfin sur les idées primitives qu'il a conçues directement des choses sensibles. Il convient de remarquer aussi que les espèces intelligibles obtenues par conception ou par réflexion, ne sont pas ce qui est directement perçu, mais bien le miroir où notre intellect saisit les essences des objets matériels d'une manière universelle.

Appliquons ces idées générales à la connaissance mathématique. Mais pour cela, voyons d'abord quel est l'objet à concevoir. D'une façon générale, c'est *la quantité* qui constitue l'objet propre de cette connaissance: « *Quantitas quam considerat mathematicus* [11] »; et encore: « *Mathematica quæ considerat quantitates, et ea quæ quantitates consequuntur, ut figuram* [12].» La quantité sous toutes ses formes, figure ou nombre, continue ou discrète, doit donc déterminer le caractère spécial de cette connaissance. Pour cela, rappelons-en la nature: a-t-elle une existence séparée lui permettant d'être appréhendée directement par les sens et l'esprit? ou bien son existence dépend-elle d'un autre être dont il faut la dégager par une opération cognitive plus complexe? Étant une catégorie de l'être,

[9] ARISTOTE, *De Anima*, 431 *b* 15.
[10] *De Natura Verbi Intellectus* (in *Opuscula Omnia*, ed. Lethielleux), in fine.
[11] *De Trinitate* (in *Opuscula Omnia*, ed. Lethielleux), q. 5, a. 1, obj. 6.
[12] *De Trinitate*, q. 5, a. 3, c.

la quantité ne saurait exister par elle-même, pas plus que tout autre accident d'ailleurs: c'est dans l'être qu'il faut donc la concevoir.

Or l'être en tant qu'être ne s'exprime pas en lui-même, mais bien sous le rapport des transcendantaux, qui ne lui ajoutent rien comme le ferait un accident. L'Un, le Vrai, le Bien diffèrent donc de l'être non point réellement, mais par une distinction de raison: c'est pourquoi, comme l'être, ils transcendent toute catégorie du moment qu'ils se disent de tout ce qui est absolument [13]. L'Un en particulier n'ajoute rien à l'être; il le caractérise en tant qu'indivis, non pas sur le plan matériel, mais bien sur le plan métaphysique. Il convient d'insister ici sur cette distinction, que les pythagoriciens et les platoniciens ont apparemment négligée: c'est que l'Un n'ajoute rien à l'être, en tant qu'il est convertible avec lui; mais l'Un ajoute à l'être lorsqu'il est considéré comme principe du nombre [14]. Et c'est en utilisant cette dernière unité dans l'ordre abstrait qu'on peut obtenir par répétition et par association la série des entiers, et par extension la série des nombres réels.

D'autre part, l'être se réalise dans le monde sensible sous la forme spatiale, l'étendue figurée. Et celle-ci peut être saisie soit par l'analyse du mouvement, soit par l'abstraction des qualités premières des objets sensibles: c'est en utilisant le résultat de ces opérations cognitives qu'on obtient les concepts géométriques, point de départ de la science du continu spatial. Nous ne ferons que mentionner ici le problème de la relation d'ordre ou d'importance entre les quantités discrètes et continues; ou encore celui de l'extension possible de la notion de nombre. Qu'il nous suffise de dire que l'analyse logique de la notion de mouvement d'une part, et les analogies que l'on pourrait tirer dans l'ordre prédicamental, de la distinction, dans l'ordre transcendantal, entre la quantité intensive et la quantité extensive, d'autre part, pourraient contribuer à éclairer certains aspects des discussions récentes sur le continu.

En attendant, on voit bien l'importance que prend la notion d'*abstraction* dans la connaissance mathématique, si l'on tient compte de la nature propre de la quantité sous les deux aspects du discret et du continu. Rappelons d'abord que l'abstraction prend une double forme: elle se

[13] *Summa theol.*, I, q. 5, a. 1 (Bien); q. 11, a. 1 (Un); q. 16, a. 3 (Vrai).
[14] *Summa theol.*, I, q. 11, a. 1 ad 1.

réalise par *simplification,* ou bien par *composition et division* [15]. Dans le premier cas, la concentration de l'attention permet à l'intellect de séparer des choses qui ne sont pas divisées dans la réalité: ainsi, nous séparons l'universel du particulier — comme l'animal de l'homme ou la figure rectiligne fermée du triangle — en détruisant l'objet que nous retranchons de celui qui fixe notre attention: c'est par simplification que nous séparons également les espèces des images. Dans le second cas, l'intellect sépare des objets qui se trouvent habituellement ensemble dans l'expérience, mais que la pensée peut conserver séparément après leur division: c'est ainsi que nous séparons la forme de la matière, comme par exemple le cercle d'un corps rond. Dans ce genre d'abstraction, on peut envisager des formes qui se trouvent ou non réalisées dans des sujets et qui peuvent être pensées séparément en elles-mêmes. Il convient d'ajouter que l'abstraction par simplification n'est pas sujette à la fausseté et à l'erreur, comme c'est le cas pour l'abstraction par composition et division.

Analysons davantage cette seconde forme de l'abstraction qui semble être plus directement en cause surtout dans les premières étapes de la connaissance mathématique. Selon saint Thomas, l'abstraction de la matière se fait suivant quatre modes: *Abstractio fit a materia quadrupliciter: scilicet a materia sensibili, intelligibili, communi et individuali.* Et précisant davantage la connaissance mathématique, il nous donne ce texte significatif: « *Species autem mathematicæ possunt abstrahi per intellectum a materia sensibili, non solum individuali sed etiam communi; non tamen a materia intelligibili communi, sed solum individuali* [16]. »

Pour bien comprendre cette différence de modalité dans l'opération de l'abstraction, rappelons que la matière peut être considérée sous un double aspect: soit comme matière commune, soit comme matière individuelle; et suivant une division superposée, soit comme matière sensible, soit comme matière intelligible. La matière sensible est celle qui tombe sous les sens; tandis que la matière intelligible se rapporte à une substance en tant qu'elle est soumise à la quantité (*Materia intelligibilis dicitur substantia secundum quod subjacet quantitati*). En combinant ces divers aspects, on obtient la matière sensible commune ou individuelle, et la matière intelligible commune ou individuelle. Or, l'intellect conçoit

[15] *Summa theol.*, I, q. 85, a. 1 ad 1.
[16] *Summa theol.*, I, q. 85, a. 1 ad 2.

l'espèce d'une chose naturelle en faisant abstraction de la matière sensible individuelle, mais non pas de la matière sensible commune, qui lui est nécessaire pour la formation des images. Tandis que les espèces mathématiques sont conçues par l'intellect en faisant complètement abstraction, d'une part, de la matière sensible, individuelle et commune, et, d'autre part, de la matière intelligible individuelle, mais non commune.

On sait en effet, par la définition même de la matière intelligible, que la quantité est comprise dans toute substance antérieurement aux qualités sensibles. C'est ce qui permet de séparer par la pensée les qualités sensibles d'un objet de son élément quantitatif, numérique ou géométrique; en d'autres termes, c'est pourquoi on peut abstraire l'aspect quantitatif d'un objet de sa matière sensible. Mais en ce qui concerne les concepts mathématiques surtout, on ne saurait les considérer en dehors d'une substance sujette à la quantité; car ce serait alors faire abstraction de la matière intelligible commune sans laquelle il n'y a point de concept. On peut néanmoins les considérer en dehors de telle ou telle substance; et c'est là une abstraction de la matière intelligible individuelle.

Affectant un réalisme plus prononcé, Aristote avait déjà dit que les objets mathématiques caractérisent les choses naturelles dont ils ont été séparés par abstraction simple. Pour lui, la géométrie étudie les lignes sensibles, mais non en tant que sensibles. De sorte que la distinction entre les objets mathématiques et les objets sensibles est surtout une différence de cognoscibilité et non de fait. Et cependant, lui aussi avait suggéré un double palier de l'abstraction, en ce qui concerne les notions géométriques en particulier. Il nous dit, en effet, qu'il faut appliquer le pouvoir de l'abstraction aux objets terrestres ou célestes, jusqu'à ce qu'il n'en reste que le caractère quantitatif et continu, et leurs attributs immédiats. De plus, en enlevant les qualités secondes de ces objets et leur capacité de changement ou de mouvement, il ne nous reste que leurs formes et dimensions. Les corps naturels se réduisent ainsi à de simples solides à trois dimensions. En appliquant plus loin l'opération de l'abstraction on aboutit aux idées de surface, de ligne et de point, quoique ces concepts n'aient pas d'existence formelle en dehors de l'esprit. Une dernière étape doit être franchie cependant avant de parvenir aux formes pures, puisqu'un solide, une surface, une ligne ou un point particulier informe nécessairement une extension particulière. Il convient donc de faire abstraction de cette extension particulière avant d'aboutir à l'idée exacte des concepts géométriques [17].

Saint Thomas accepte cette doctrine péripatéticienne, tout en raffinant ce que son réalisme mathématique avait de trop intuitif. Pour lui aussi, les concepts mathématiques font abstraction de la matière sensible, la notion du cercle, par exemple: « *Forma circuli abstrahitur per intellectum ab omni materia sensibili* [18]. » Mais il insiste sur la distinction des êtres sensibles et des notions mathématiques, dont l'immatérialité et l'immobilité donnent lieu à une science uniquement théorique et non pas active ou « factuelle ». Le texte suivant est caractéristique à ce sujet: « *Scientia mathematica speculatur quædam inquantum sunt immobilia et inquantum sunt separata a materia sensibili licet secundum esse non sint immobilia vel separabilia. Ratio enim eorum est sine materia sensibili, sicut ratio concavi vel curvi. In hoc ergo differt mathematica a physica; quia physica considerat ea quorum definitiones sunt cum materia sensibili; et ideo considerat non separata inquantum sunt non separata. Mathematica vero considerat ea quorum definitiones sunt sine materia sensibili. Et ideo etsi sunt non separata ea quæ considerat, tamen considerat ea inquantum sunt separata* [19]. » Nous verrons tout à l'heure comment l'immatérialité des définitions mathématiques augmente la certitude de la science qui les emploie.

En attendant, il convient de signaler que la séparation des notions mathématiques qui est plus marquée dans saint Thomas que dans Aristote, ne doit pas s'entendre dans un sens platonicien: en effet, cette séparation se fait dans l'intellection et non dans l'existence. En d'autres termes, l'acte de la connaissance ne projette pas ces notions dans un monde indépendant de l'esprit ou des choses. « *Sicut etiam superficie destructa ut quidam dicunt, destruitur corpus, et destructa linea destruitur superficies. Patet etiam quod superficies est terminus corporis, et linea terminus superficiei. Et secundum dictorum positionem linea est pars superficiei, et superficies pars corporis. Ponebant enim corpora componi ex superficiebus, et superficies ex lineis, et lineas ex punctis. Unde sequebatur quod*

[17] ARISTOTE, *Métaphysique*, 1036 *a* 2 et 1078 *a* 25.
[18] *Summa theol.*, I, q. 40, a. 3, c.
[19] *Comm. in Metaph.* (ed. Marietti), lib. VI, lect. I (n^os^ 1160-1161).

punctum sit substantia lineæ, et linea superficiei, et sic de aliis [20]. » Non seulement saint Thomas évite ainsi le problème complexe des lignes insécables, mais encore celui de l'assimilation des éléments géométriques avec les éléments des corps naturels. On sait que ces deux problèmes avaient soulevé de longues discussions dans l'école platonicienne, et qu'Aristote avait pu les renvoyer dos à dos au moyen de sa distinction de l'acte et de la puissance.

D'autre part, l'opération de l'abstraction ainsi conçue élève les notions mathématiques à la dignité d'universaux pour ainsi dire parfaits qui peuvent former la matière d'une vraie science (*Scientia est de universalibus, quia de individuis et singularibus non est scientia*). Comme telles, ces notions peuvent être appréhendées par l'esprit qui se les assimile par le moyen d'espèces intelligibles, lesquelles sont la ressemblance des choses saisies par l'intelligence. « *Scientia est assimilatio intellectus ad rem scitam et scitum etiam est perfectio scientis* [21]. » Saint Thomas ne manque pas de marquer cependant le caractère particulier des mathématiques: « *Omnis scientia intellectualis qualitercumque participet intellectum: sive sit solum circa intelligibilia, sicut scientia divina; sive sit circa ea quæ sunt aliquo modo imaginabilia, vel sensibilia in particulari, in universali autem intelligibilia; et etiam sensibilia prout de his est scientia, sicut in mathematica et in naturali; sive etiam ex universalibus principiis ad particularia procedant, in quibus est operatio, sicut in scientiis practicis: semper oportet quod talis scientia sit circa causas et principia* [22]. »

L'acte de la connaissance, cependant, n'est pas différent en soi, mais uniquement dans ses modes, lorsqu'il s'applique aux objets sensibles et mathématiques. Dans les deux cas, l'intellect abstrait les espèces intelligibles des images, d'une part, en tant qu'il considère la nature des choses en général et en dehors de leurs conditions individuelles; et, d'autre part, il laisse persister cette nature dans les images, du moment qu'il ne peut saisir les choses dont il abstrait les espèces intelligibles qu'en se tournant vers ces images [23]. En somme l'espèce intelligible est par rapport à l'intellect, ce par quoi l'intellect connaît et non point ce qu'il connaît, si ce n'est

[20] *Comm. in Metaph.*, lib. V, lcet. 10 (n° 900).
[21] *Summa theol.*, I, q. 14, a. 2 obj. 2.
[22] *Comm. in Metaph.*, lib. VI, lect. I (n° 1145).
[23] *Summa theol.*, I, q. 85, a. 1 ad 5.

d'une manière secondaire; car ce que l'intellect connaît essentiellement, c'est la chose même dont l'espèce intelligible est la ressemblance. « *Intellectum in actu est intellectus in actu, inquantum similitudo rei intellectæ est forma intellectus* [24]. »

Quant au mode de connaissance des objets mathématiques plus spécialement, l'intellection ne se produit pas à la suite de l'impression que les images font sur l'intellect, puisque les concepts mathématiques sont le plus souvent entièrement différents des images des choses sensibles: l'acte de connaissance se produit donc par une seconde abstraction. Ici, c'est le cas de reconnaître la nécessité pour notre intellect d'abstraire des images. « *Anima non potest intelligere sine phantasmata* [25]. » Pour les concepts mathématiques plus spécialement, saint Thomas ajoute: « *Necesse est quod intelligibilia intellectus nostri sint in specibus sensibilibus secundum esse; tam illa quæ dicuntur per abstractionem, scilicet mathematica, quam naturalia, quæ sunt habitus et passiones sensibilium* [26]. » On voit ainsi dans quel sens les objets mathématiques sont séparés des choses sensibles.

III. — LA CERTITUDE MATHÉMATIQUE.

Les modalités de la connaissance mathématique donnent à celle-ci certains avantages sur la connaissance du sensible: celle-là est en quelque sorte plus directe, plus parfaite et plus certaine. Ici encore nous voyons saint Thomas suivre la pensée d'Aristote en développant davantage ses implications. Ce n'est pas uniquement en raison du caractère particulier de la démonstration de ses propositions, que la science des nombres et de l'étendue possède un plus grand degré de certitude; mais bien en raison du mode d'appréhension des notions et des principes de cette science. Voyons pourquoi il en serait ainsi.

Tout d'abord, en raison de leur nature même, les concepts mathématiques évitent les difficultés que soulève la distinction entre les objets physiques et les résultats de l'abstraction opérant sur les images que nous en avons. Dans la connaissance sensible, l'intellect arrive au concept au moyen des accidents, vu qu'il doit partir des données sensorielles: il arri-

[24] *Summa theol.*, I, q. 85, a. 2 ad 1.
[25] *Comm. De Anima*, lib. III, lect. 12 (n° 772).
[26] *Comm. De Anima*, lib. III, lect. 12 (n° 791).

ve ainsi à saisir l'essence des choses par l'utilisation de leurs accidents sensibles. Mais cette connaissance des formes substantielles nous laisse voir indirectement la substance même des choses. Et ceci est également vrai en quelque sorte pour l'âme qui est mieux connue par ses analogies avec les choses sensibles que dans sa propre essence. « *Formæ artificiales accidentia sunt, quæ sunt magis notæ quoad nos quam formæ substantiales, utpote sensui propinquiora* [27]. »

Par contre, les concepts mathématiques ne sont pas connus par leurs accidents du moment qu'ils n'ont pas de substance, mais directement dans leur nature même. « *Si autem substantiam alicujus rei intellectus cognoscat per accidentia . . . hoc est per accidens, in quantum cognitio intellectus oritur a sensu; et sic per sensibilium accidentium cognitionem oportet ad substantiæ intellectum pervenire; propter quod hoc non habet locum in mathematicis, sed in naturalibus tantum* [28]. » En somme la connaissance des concepts mathématiques est plus directe, parce qu'étant séparés de la matière sensible, ils ne contiennent rien de matériel dans leur définition. Par là même, ils échappent également à toutes les difficultés que le principe d'individuation pose aux concepts en général, puisque la matière même des choses sensibles échappe à notre compréhension et rend ainsi impossible leur connaissance parfaite. Or la matière des concepts mathématiques ne les individualise pas, puisqu'elle est intelligible et idéale et non point sensible. Par conséquent, cette matière idéale est pleinement connaissable; c'est pourquoi la définition des concepts mathématiques embrasse toute leur essence et saisit leur nature complètement.

D'autre part, comme ces concepts ne sont pas sujets au changement, du moment qu'ils sont immobiles en raison même de leur immatérialité, ils n'ont pas besoin d'être revisés, comme c'est le cas pour les concepts des objets sensibles. L'intellect en a donc une connaissance plus parfaite. « *Immaterialia vero secundum seipsa sunt certissima quia sunt immobilia. Sed illa quæ in sui natura sunt immaterialia, non sunt certa nobis propter defectum intellectus nostri, ut prædictum est. Hujusmodi autem sunt substantiæ separatæ. Sed mathematica sunt abstracta a materia, et tamen non sunt excedentia intellectum nostrum: et ideo in eis est requi-*

[27] *Comm. De Anima*, lib. II. lect. 2 (n° 235).
[28] *Contra Gentiles*, lib. III. cap. 56 (p. 281).

renda certissima ratio. Et quia tota natura est circa materiam, ideo iste modus certissimæ rationis non pertinet ad naturalem philosophum [29]. »

La certitude de la connaissance mathématique affecte aussi bien son objet que son mode de développement. En ce qui concerne la vérité des concepts mathématiques, elle résulte du fait qu'ils sont abstraits et en quelque sorte séparés des objets individuels qui nous en ont fourni les éléments. En effet, on ne saurait dire qu'il y a erreur ou fausseté dans l'intellect si ces concepts ne correspondent pas adéquatement aux choses sensibles d'où ils sont tirés en dernière analyse; du moment que la double opération de l'abstraction sépare complètement ces concepts des objets matériels, et que même les images par lesquelles nous les représentons ne sont que des points d'appui du raisonnement. En d'autres termes, si ces concepts diffèrent des choses sensibles qui leur ont donné naissance, comme par exemple le cercle parfait diffère de l'objet naturel rond qui en a pu être l'image primitive, ce n'est pas une raison pour dire que la connaissance mathématique est fausse, puisque l'intellect forme ces concepts en abstrayant les espèces intelligibles des images produites au début.

Cette vérité est néanmoins formelle, étant donné que les concepts mathématiques n'existent pas séparément en soi. Bien que l'intellect les sépare des images et des objets sensibles, il ne les projette pas en surplus dans la réalité ou dans la nature. Saint Thomas nous dit, en effet, que si les mathématiques avaient une existence propre dans la nature, elles renfermeraient quelque chose de bon, ne serait-ce que l'existence. C'est pourquoi elles ne peuvent exister que dans l'intellect qui leur donne toute leur réalité. En les abstrayant du mouvement et de la matière, il les sépare de la cause finale qui meut la volonté de l'agent, et par là il les rend indifférentes au bien. « *Mathematica non subsistunt separate secundum esse: quia si subsisterent, esset in eis bonum, scilicet ipsum esse eorum. Sunt autem mathematica separata secundum rationem tantum, prout abstrahuntur a motu et materia; et sic abstrahuntur a ratione finis, qui habet rationem moventis. Non est autem inconveniens quod in aliquo ente, secundum rationem, non sit bonum vel ratio boni; cum ratio entis sit prior quam ratio boni* [30]. »

[29] *Comm. in Metaph.*, lib. II, lect. 5 (n° 336).
[30] *Summa theol.*, I. q. 5, a. 3 ad 4.

Il est vrai que l'être en tant qu'être est toujours bon, puisqu'il a toujours quelque chose de parfait en lui, et qu'il remonte à Dieu en dernière analyse. Mais, puisque l'être comme tel précède le bien logiquement, l'être de raison peut être indifférent à la bonté. Pour cette raison, on ne saurait dire que les mathématiques s'identifient au bien. Car celui-ci appelle l'être comme tel pour le qualifier; alors que les concepts mathémathiques n'existent que dans l'intellect. (*Sicut res sunt separabiles a materia, sic circa intellectum sunt*). Mais il serait faux de dire, ajoute saint Thomas, qu'il n'y a rien de bon dans les mathématiques, puisqu'on peut toujours qualifier leur être et leur nature par un aspect du bien: « *Si ponantur esse substantiæ intelligentes non moventes, ut Platonici posuerunt, nihilominus tamen inquantum habent intellectum et voluntatem, oportet ponere in eis finem et bonum, quod est objectum voluntatis. Mathematica autem non moventur, nec movent, nec habent voluntatem. Unde in eis non consideratut bonum sub nomine boni et finis. Consideratur tamen in eis id quod est bonum, scilicet esse et quod quid est. Unde falsum est quod in mathematicis non sit bonum* [31]. »

En vertu de leur nature propre comme êtres de raison et de la perfection de leurs définitions, les objets mathématiques permettent de développer leurs implications et leurs relations avec une grande certitude. Nous avons déjà vu que les notions mathématiques sont en quelque sorte complètement connues par leurs définitions: en raison des termes mêmes qu'elles emploient, ces définitions sont en un certain sens décisives et ne permettent pas de contradiction: ainsi l'idée de cercle implique nécessairement la rotondité, tandis que cette qualité n'est pas indispensable à d'autres concepts. Saint Thomas nous donne ainsi cet exemple, en discutant l'incorruptibilité des substances intellectuelles: « *Rotundum per se quidem inest circulo, per accidens autem æri; unde æs quidem fieri non rotundum est possibile, circulum autem non esse rotundum est impossibile . . . Si aliqua substantia esset circulus, numquam posset fieri non rotunda* [32]. » Ainsi, les concepts mathématiques possèdent ce qu'on pourrait appeler une *antitypie* rationnelle qui les empêche de recevoir des attributs ou des postulats incompatibles avec leur supposition et leur signification propre.

[31] *Comm. in Metaph.*, lib. III, lect. 4 (n° 385).
[32] *Contra Gentiles*, lib. II, cap. 55 (p. 144).

De plus, la certitude de la preuve en mathématiques se trouve renforcée par le procédé même de la discipline de cette science, qui la rend plus certaine et plus facile en un sens que la physique, la métaphysique, et toutes les sciences pratiques. C'est pourquoi les mathématiques servent dans les démonstrations d'autres sciences plus complexes, mais non conversement. « *Quanto scientia aliqua abstractiora et simpliciora considerat, tanto ejus principia sunt magis applicabilia aliis scientiis: unde principia mathematicæ sunt applicabilia naturalibus, non autem e converso* [33]. » Cette discipline comprend en effet un raisonnement précis, et non point de simples opinions que donne la dialectique, ou même l'intervention de la mémoire qui ne produit que l'opinion. On connaît ce double adage scolastique: *Una demonstratio facit habitum scientiæ; sed opinio non fit ex uno argumento dialectico, sed ex pluribus congregatis.* Et encore: *Habens memoriter conclusiones geometriæ non per media geometrica, non habet scientiam geometriæ, sed opinionem.*

Cette discipline suit les étapes de la méthode démonstrative si bien décrite dans l'*Organon* aristotélicien: ainsi elle comporte des principes premiers se rapportant directement aux objets mathématiques, et des règles d'inférence en conformité avec les lois logiques de la pensée. On sait qu'Aristote avait prononcé l'universalité des principes ultimes de la pensée, et soutenu qu'ils sont appréhendés par une intuition directe de leur vérité. Quant aux principes spécifiques des mathématiques, ils sont saisis également par une intuition rationnelle ou encore par induction. Mais ils n'ont pas besoin de preuve, et ils doivent être postulés comme tels, selon le principe: *Nulla scientia probat principia sua, sed probat alia ex eis* [34]. Seule la métaphysique peut soulever la question de la valeur de ces principes et en proposer la solution.

D'autre part, saint Thomas ne considère pas cette intellection immédiate des principes mathématiques comme un signe d'imperfection; au contraire, l'intuition est supérieure au raisonnement, de même que ce dernier est supérieur à la connaissance sensible: *Scientia est nobilior cognitione sensus; sed intellectio, qui est habitus principiorum, est nobilior quam scientia conclusionum.* L'intuition rationnelle voit immédiatement

[33] *De Trinitate*, q. 5, a. 3 ad 6.

[34] Cf. *Summa theol.*, I, q. 1, a. 8, c.; *Comm. in Metaph.*, lib. III, lect. 5 (n^os 389-392).

la convenance des termes des principes premiers: en mathématiques, ses résultats sont justifiés par l'application des lois de la pensée à la signification des termes liés entre eux dans les postulats. En somme, la raison ne peut pas être droite dans un domaine sans l'être dans un autre, car alors elle se trouverait privée de toute rectitude du fait qu'elle pèche contre les lois de la pensée exprimant les nécessités de l'être. « *Si quis erraret circa hoc principium, omne totum est majus sua parte, non posset habere scientiam geometricam; quia oportet multum recedere a veritate in sequentibus* [35]. » Cette citation implique le principe de réduction à l'absurde, qui est utilisé couramment dans la preuve mathématique et qui se ramène en dernière analyse au principe de contradiction.

Quant à l'induction, saint Thomas nous dit à la suite d'Aristote que dans les sciences mathématiques, les principes se manifestent par induction, dans les sciences naturelles par les sens, dans les sciences morales par la pratique, et dans les arts par l'expérience. Au sujet de l'induction plus précisément il nous est dit: « *Inductio autem inducitur ad cognoscendum aliquod principium et aliquod universale in quod devenimus per experimenta singularium* [36]. » Il est évident, en effet, qu'en raison de l'origine expérimentale de nos connaissances mathématiques, certains principes spécifiques de ces sciences sont atteints comme des généralisations de propriétés, des faits primitifs que l'abstraction transforme en concepts mathématiques. C'est pourquoi les mathématiques sont compatibles aussi bien avec l'expérience qu'avec l'imagination. « *Instruendi sunt in mathematicis quæ nec experientia indigent, nec imaginationem transcendunt* [37]. » Et pour cette raison, comme nous le verrons tantôt, les mathématiques doivent être enseignées après la logique et avant les sciences naturelles, morales et divines.

Notons que saint Thomas admet également la doctrine péripatéticienne de la hiérarchie des principes mathématiques entre eux et aussi par rapport aux autres sciences. Ainsi, les principes de l'arithmétique sont plus certains que ceux de la géométrie, et ces derniers plus certains que les principes des sciences naturelles. D'où l'aphorisme: *Una scientia est certior alia dupliciter: scilicet quia dicit propter quid, nec est de materia*

[35] *Summa theol.*, I-II, q. 65, a. 1 ad 4.
[36] *Comm. in Ethicam*, lib. VI, lect. 3 (n° 1148).
[37] *Comm. in Ethicam*, lib. VI, lect. 7 (n° 1211).

sensibili, et est ex paucioribus, ut arithmetica respectu geometriæ. Et le saint docteur précise: « *Quæ quidem principia aut sunt certiora quoad nos sicut in naturalibus, quia sunt proprinquiora sensibilibus, aut simpliciora et priora secundum naturam, sicut est in mathematicis*[38]. »

La primauté des principes mathématiques et l'immatérialité de leurs concepts donnent un caractère formel à l'administration de la preuve dans le développement de la science. Ainsi, la démonstration des relations possibles entre les objets mathématiques ne saurait faire appel aux causes efficientes ou finales. « *Mathematica accipiuntur ut abstracta secundum rationem, cum tamen non sint abstracta secundum esse. Unicuique autem competit habere causam agentem, secundum quod habet esse. Licet igitur ea quæ sunt mathematica habeant causam agentem; non tamen secundum habitudinem quam habent ad causam agentem, cadunt sub consideratione mathematici. Et ideo in scientiis mathematicis non demonstratur aliquid per causam agentem*[39]. »

Dans ce passage saint Thomas répond à l'objection que tout être n'est pas nécessairement créé par Dieu comme cause efficiente, puisque les mathématiques ne demandent pas cette cause; et il explique que tout ce qui est autre que Dieu n'a pas l'être par soi, mais par participation. En vertu de la distinction entre les objets sensibles et les mathématiques, il explique pourquoi seuls les premiers ont une cause efficiente. « *In scientiis mathematicis, quæ abstrahunt a materia et motu, nihil probatur per hanc causam, sicut probatur in scientia naturali, quæ est de rebus mobilibus, aliquid per rationem boni. Sicut cum assignamus causam quare homo habet manus, quia per eas melius potest exequi conceptiones rationis*[40]. »

En effet, tout en étant des êtres de raison, les objets mathématiques ont bien une cause efficiente, puisqu'ils sont produits par une opération de l'intellect. Mais l'acte de la conception n'apporte pas avec lui cette cause efficiente comme telle. En d'autres termes, les objets mathématiques sont conçus par l'intellect en raison de leur participation avec les choses sensibles où ils se trouvent en puissance. Ils ne sont donc pas produits par eux-mêmes, mais par l'intervention de deux éléments, l'esprit et les choses, dont la nature est différente de la leur. On ne saurait donc

[38] *Comm. in Metaph.*, lib. VI, lect. I (n° 1146).
[39] *Summa theol.*, I, q. 44, a. 1 ad 3.
[40] *Comm. in Metaph.*, lib. III, lect. 4 (n° 375).

exiger de retrouver dans ces êtres de raison les causes mêmes qui les ont produits: et c'est pourquoi la preuve mathématique ne comporte pas de causes efficientes. De plus, elle ne fait pas intervenir de causes finales, puisqu'il n'est pas de la nature des objets mathématiques d'être conçus dans la perspective de l'être réel et du bien, comme c'est le cas pour les concepts des choses sensibles.

Le caractère purement formel des sciences mathématiques rend celles-ci bien plus faciles à étudier que les autres sciences; et par conséquent elles sont particulièrement avantageuses pour l'éducation des jeunes. Ainsi, nous dit saint Thomas, le géomètre, en vertu de l'habitude de raisonner et de conclure qu'il a acquise, comprend sans trop de peine les propositions qui provoquent ses méditations pour la première fois; tout comme l'inclination vertueuse que nous fait prendre la pratique d'une vertu morale, nous donne la possession virtuelle de toute autre vertu. « *Geometer modico studio acquirit scientiam alicujus conclusionis quam numquam consideravit* [41]. » La difficulté des mathématiques ne provient donc pas de leurs objets propres qui sont simples et immatériels, mais de nos dispositions psychologiques qui ne nous portent pas toujours à utiliser avec persistance et suivant les règles, aussi bien les procédés de l'abstraction que ceux de la pensée discursive et de la démonstration. Cependant, une fois l'habitude acquise, la science mathématique devient la plus facile, même pour nos dispositions psychologiques.

Quant à l'aspect pédagogique des mathématiques, il se caractérise non seulement par leur facilité de nature, mais encore par la hiérarchie des sciences dans l'ordre de l'être et dans l'ordre de la connaissance. Ainsi, nous dit saint Thomas, « *Mathematica potest sciri a pueris, non autem physica quæ experimentum requirit. Ex quo datur intelligi quod primo logica deinde mathematica debet addisci* [42]. » Élaborant cette même pensée, il précise ce précepte dans le texte suivant, où il se demande si les mathématiques ne devraient pas s'ordonner avant les sciences naturelles du moment qu'elles doivent être enseignées en premier lieu: « *Mathematica prior occurrit addiscenda quam naturalis; eo quod mathematicam facile possunt addiscere pueri, non autem naturalem nisi provecti. Unde et apud*

[41] *Summa theol.*, I-II, q. 65, a. 1 ad 1.
[42] *De Trinitate*, q. V, a. 1 ad 3.

antiquos hic ordo in adipiscendis scientiis fuisse dicitur observatus: ut primo logica, deinde mathematica, tertio naturalis, postea moralis addisceretur, et tandem divinæ scientiæ homines studerent. Ergo mathematicam naturali scientiæ præordinare debuit [43]. »

Le Docteur angélique se hâte de faire l'importante distinction que l'ordre de l'enseignement n'est pas nécessairement celui de la connaissance: « *Quamvis naturalis philosophia post mathematicam discenda occurrat, eo quod universalia ipsius documenta indigent experimento et tempore, tamen res naturales,, cum sint res sensibiles, sunt naturaliter magis notæ quam res mathematicæ a materia sensibili abstractæ* [44]. » Tout en reconnaissant donc que les choses naturelles sont plus directement connues que les choses abstraites ou les choses religieuses, saint Thomas pense avec raison que la science des choses naturelles ne doit être enseignée qu'après la logique et les mathématiques.

Il serait intéressant d'insister également sur la primauté de la logique par rapport aux mathématiques, en raison des théories modernes sur les rapports de ces sciences. La critique de ces théories révélerait en effet que saint Thomas a complètement raison aussi bien de séparer la logique des mathématiques que de les ordonner comme il le fait. Notons aussi l'importance qu'il accorde à la logique comme une propédeutique générale pour l'utilisation consciente des lois de la pensée et de l'analyse des termes propres à chaque science.

IV. — VALEUR DE L'ÉPISTÉMOLOGIE THOMISTE.

Les aspects de la connaissance mathématique d'après saint Thomas que nous venons de discuter, ne font que toucher l'essentiel de la pensée du Docteur angélique sur les sciences exactes. Il y aurait encore lieu de considérer des problèmes plus spécifiques, dans l'ordre de l'épistémologie, de la méthodologie, de la technique et de l'histoire. Ainsi, on pourrait étudier la doctrine thomiste de la quantité en général (dans l'ordre métaphysique et logique), de l'infini, du nombre et des figures; ou encore sa théorie de l'espace et du temps et sa critique de la théorie des lieux et de ses applications; ou même sa théorie du mouvement en lui-même et

43 *De Trinitate*, q. V, a. 1, obj. 10

44 *De Trinitate*, q. V, a 1 ad 10

par rapport à ses applications scientifiques; ou enfin sa doctrine de la connaissance scientifique en général et des rapports entre la logique, les mathématiques et la physique.

On pourrait encore analyser ses vues sur l'emploi analogique des mathématiques en théologie, et la valeur du symbolisme en général. Il serait même avantageux de comparer ses idées sur tous ces points par rapport à la technique des sciences exactes au moyen âge, aux idées des anciens et à celles des modernes. Il serait enfin intéressant d'envisager la doctrine thomiste dans ses rapports avec les enseignements de ses contemporains, et dans la perspective historique des grandes controverses mathématiques. Nous ne faisons qu'indiquer ces questions pour montrer toute la richesse des recherches à entreprendre sur la philosophie scientifique du saint docteur.

En attendant, pouvons-nous tirer quelques conclusions d'ensemble sur la valeur intrinsèque de la connaissance mathématique d'après saint Thomas? En premier lieu, on peut dire que les idées du Docteur angélique sur ce point s'intègrent parfaitement dans son épistémologie générale, et qu'elles occupent la place qui leur revient en propre dans la hiérarchie de nos connaissances. En second lieu, il apparaît que ces idées suivent de près la pensée d'Aristote sur ces mêmes questions; et que, par conséquent, elles divergent des intuitions platoniciennes que certains historiens modernes tiennent à tort pour être plus justes que l'enseignement du Stagyrite. En troisième lieu, il semble que saint Thomas affine et perfectionne le réalisme mathématique d'Aristote en introduisant des distinctions plus précises sur la nature des objets mathématiques. Enfin, en évitant des considérations et des exemples proprement techniques, le saint docteur reste bien dans l'esprit de son temps tel que nous l'avons défini au début de cette étude.

Peut-on dire que saint Thomas s'est trompé dans le détail de son épistémologie scientifique par rapport à l'objet propre des mathématiques? Nous ne le pensons pas. En contrôlant ses exemples mathématiques et ses références à la science de son temps, on ne trouve aucunement des erreurs de compréhension ou d'interprétation. N'étant pas mathématicien, il n'avait pas à pousser trop loin l'analyse des termes et des méthodes des sciences exactes. Mais il n'en était pas moins familier avec les principes généraux de ces sciences, ne fût-ce même que pour avoir fait pour son compte l'expérience pédagogique signalée dans le *De Trinitate*, où il recommande l'étude de la logique et des mathématiques comme une introduction générale à l'enseignement et à la science.

Il est vrai que nous trouvons dans saint Thomas des opinions relatives à des concepts mathématiques qui n'ont rien à voir avec la science en elle-même. Ainsi en est-il lorsqu'il discute les mouvements des corps célestes dans son commentaire du *De Cœlo*, où il fait certaines appréciations sur la valeur relative des formes concaves et convexes, et sur le mouvement circulaire comparé aux autres mouvements. De même, il nous dit, dans le *Contra Gentiles*, qu'un mouvement ne peut être perpétuel que s'il est local, et qu'il ne peut être local que s'il est circulaire: c'est pourquoi dans la réalité sensible, le premier des mouvements est celui du ciel, vu que ce mouvement est local, circulaire et perpétuel. Et il insiste pour dire que le mouvement circulaire est le plus parfait, parce que tout cercle revient à son principe. « *Effectus maxime perfectus est quando in suum redit principium. Unde et circulus inter omnes figuras, et motus circularis inter omnis motus, est maxime perfectus; quia in eis ad principium reditur* [45]. »

Précisant davantage cette idée de la perfection de la ligne circulaire, il nous dit: « *Linea circularis est maxime una; quia non solum habet continuitatem, sicut linea recta; sed etiam habet totalitatem et perfectionem, quod non habet linea recta* [46]. » Enfin, l'idée de cercle implique une totalité parce qu'il n'est pas capable d'addition. « *Inter omnes lineas, linea circularis est perfectior, quia non recipit additionem* [47]. » En somme, le cercle serait la plus parfaite des figures parce qu'il est un et fini, parce qu'il n'est pas capable d'addition, et parce qu'il revient à son principe. Mais il serait difficile, croyons-nous, de maintenir qu'un être mathématique est plus parfait en soi qu'un autre, si tous les deux sont complètement définis. D'ailleurs le cercle n'est pas la seule ligne à jouir des propriétés déjà nommées: ainsi, l'ellipse est une, finie, incapable d'addition et elle revient à son principe. Et enfin, il n'est pas indispensable ou nécessairement vrai que les mouvements célestes soient circulaires.

[45] *De Potentia*, q. IX, a. 9 ad 15.
[46] *Comm. in Metaph.*, lib. 5, lect. 8 (nº 871).
[47] *Contra Gentiles*, lib. II, cap. 46 (1).

On pourrait dire à la rigueur que la circonférence est la plus simple des courbes, mais ce ne serait pas là une raison définitive pour dire qu'elle est la plus parfaite des lignes. A moins de vouloir étendre aux êtres de raison l'identité entre la simplicité et la perfection qui convient à l'être réel. Mais ce serait là une analogie dont on ne comprend guère l'usage dans les mathématiques d'aujourd'hui. Néanmoins, la position de saint Thomas pourrait se défendre dans la perspective historique, étant donné que la perfection intrinsèque du cercle était affirmée déjà par Platon et Aristote. On sait que l'idée de perfection mathématique veut qu'on n'utilise que la règle et le compas dans les constructions et les démonstrations de la géométrie grecque. On sait aussi que cette simplicité géométrique était exigée par le chef de l'Académie et ses successeurs dans la description des mouvements célestes. D'ailleurs, cette tendance de tout ramener au cercle était partagée par Copernic lui-même, jusqu'au moment où Képler reconnut que les planètes avaient un mouvement elliptique.

C'est pour sa valeur analogique surtout, que l'opinion de saint Thomas sur les vertus du cercle est intéressante. Ainsi cette belle analogie complète le passage cité du *De Potentia*, qui est d'ailleurs consacré au nombre des personnes divines et à la nature de leur procession: « *Unde hoc ipsum ad perfectionem Spiritus Sancti pertinet quod sua processione quasi quemdam circulum divinæ originis concludit, ut ultra jam addi non possit.* » Et plus loin, dans le même traité, il reconnaît un certain mouvement circulaire entre les opérations de l'intelligence et de la volonté, et même dans les opérations sensibles; ce mouvement étant intérieur pour Dieu et extérieur pour nous. Quant à la citation du *Contra Gentiles* relative à la perfection du mouvement circulaire, elle est donnée pour montrer que les créatures doivent être à l'image de Dieu: par leur intelligence, elles doivent retourner à leur principe, et donner ainsi une preuve de l'excellence de la création.

A un autre point de vue, on pourrait remarquer qu'en parlant de la connaissance mathématique, saint Thomas a surtout en vue les notions de la géométrie, et non point à titre égal les nombres. Ici encore on pourrait trouver des raisons aux préoccupations du saint docteur. La connaissance du nombre est en quelque sorte plus simple que celle des figures étendues: une fois compris l'idée d'unité et le principe de l'addition et de la division, la loi génétique des nombres est connue universellement. Il n'y a donc pas de raison d'insister davantage sur le mode de la connaissance numérique. Tout autre aurait été le cas si le moyen âge avait eu la connaissance de nombres autres que les nombres réels: or à cette époque, même les nombres négatifs étaient timidement introduits dans les mathématiques occidentales à l'imitation des arabes et des hindous. Nous ne croyons pas nous tromper en disant, cependant, que même en cette occurrence la théorie fondamentale de saint Thomas n'aurait pas eu à être retouchée quant à ses principes épistémologiques.

Par contre, les formes géométriques étant plus rapprochées de l'expérience sensible, demandaient plus directement une justification à la théorie de la connaissance. D'autre part, leur grande variété donnait l'occasion de considérations plus riches sur la connaissance géométrique. Les vues de saint Thomas sur la nature des figures géométriques restent valables même en regard des développements modernes de la géométrie, parce qu'elles touchent au fondement même de la connaissance. Voici, à titre d'exemples, quelques-unes de ses considérations sur les figures comme telles. « *Figura importat terminationem quantitatis*[48] »; ou encore « *Figura quæ consistit in terminatione quantitatis, est quædam forma circa quantitatem*[49] »; ou même « *Figura est quæ termino vel terminis comprehenditur*[50] »; ou enfin « *Figura est quædam forma, quæ per abscissionem materiæ et condensationem, vel rarefactionem, vel ductionem aut aliquem motum, hujusmodi potest fieri in materia*[51] ». Et plus spécialement pour les mathématiques, « *Figura abstrahit secundum suam rationem ab omni materia et forma sensibili, cum sit quoddam mathematicum*[52]. » L'analyse de ces définitions montrerait aisément leur applicabilité aux conceptions récentes.

Mais il est entendu qu'il ne faut pas chercher une adéquation complète entre la pensée de saint Thomas sur la connaissance mathématique et le détail des méthodes modernes. La découverte du calcul infinitésimal, celle des géométries non euclidiennes, les développements de la théorie des nombres, et les tentatives de rapprochement de la logique et des ma-

48 *Comm. in Physicam*, cap. III, lect. 5, sect. 3.
49 *Summa theol.*, I, q. 7 a. 1 ad 2. Voir aussi *id.*, III, q. 63, a. 2 ad 1.
50 *Contra Gentiles*, lib. IV, cap. 84 (p. 541).
51 *De Potentia*, VI, 7 ad 13.
52 *Contra Gentiles*, lib. III, cap. 105 (p. 348). Voir aussi *De Trinitate*, q. V.

thématiques, ont fait ressortir de plus en plus le caractère hypothético-déductif des sciences exactes. Et cependant, la méthode axiomatique ne suffit pas à elle seule à rendre compte de ces enrichissements et de ces nouveaux points de vue. A son tour celle-ci demande une justification épistémologique que ni le pragmatisme, ni le nominalisme ne peuvent satisfaire complètement; c'est vers une doctrine réaliste qu'il faut se tourner pour cela: et ici encore le thomisme est une source d'inspiration.

On peut, en effet, utiliser et développer dans le sens voulu un certain nombre de considérations impliquées par le thomisme, et que les circonstances avaient pour ainsi dire laissées en réserve. Du point de vue psychologique, il s'agirait de faire valoir davantage la réflexion et l'association, à côté de l'abstraction et de la conception, que le thomisme a si bien analysées. Le rôle de l'analogie et de l'imagination peut également être mis à contribution pour rendre compte de ces extraordinaires familles de concepts et de théories que les mathématiques modernes ont mises à jour. Ainsi, on peut donc retenir le point de départ empirique de la connaissance mathématique, que justifient aussi bien la psychologie individuelle que l'histoire; et même insister sur le fait que cette connaissance procède, comme le veut saint Thomas, en allant par abstraction des images sensibles aux espèces intelligibles. Mais une fois celles-ci atteintes, l'intellect peut réfléchir sur ses résultats, les analyser en leurs éléments, et imaginer des combinaisons nouvelles de ces éléments qui n'obéiraient qu'aux lois de la pensée et à la nature de ces éléments. Sans avoir à se poser la question si ces combinaisons répondent ou non à des faits concrets, on voit ainsi qu'elles offrent un champ assez large pour établir par leur moyen des théories de plus en plus abstraites. D'autre part, la correspondance de ces théories à la réalité ne devrait être qu'une question secondaire, du moment que les objets mathématiques utilisés par la science moderne sont des êtres de raison, quelle que soit leur distance de l'expérience.

Du point de vue logique, on pourrait développer l'idée de relation d'une part, et celle de démonstration de l'autre, de manière à justifier la méthode axiomatique et la généralisation de son application. Ces développements se feraient non pas en profondeur, mais en extension, afin de laisser intacte la base ontologique de la logique aristotélicienne. Du moment qu'on aboutirait ainsi aux conventions que les mathématiques modernes prennent comme point de départ, le choix de la métaphysique qui les explique ne devrait pas troubler les mathématiciens.

Quant au point de vue métaphysique même, on pourrait difficilement enrichir ce que le thomisme nous a légué. Tout au plus pourrait-on essayer une réadaptation partielle du langage classique aux besoins sémantiques et techniques des mathématiques modernes. De sorte qu'en fin de compte, les progrès de la science se présenteraient non point en opposition avec la doctrine thomiste, mais bien comme la preuve et la justification de la vérité de cette doctrine aussi bien que de leur propre validité. Si la pensée est une comme la vérité qu'elle veut atteindre, la connaissance mathématique doit pouvoir embrasser le présent comme le passé de la science dans leur unité fondamentale.

Thomas GREENWOOD.